

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Экзаменационные вопросы, II семестр

1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.
2. Изоморфизм линейных пространств.
3. Сумма и пересечение линейных пространств.
4. Прямая сумма линейных пространств.
5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
7. Изометрия.
8. Матрица Грамма. Критерий линейной зависимости.
9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
11. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы.
12. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскости в евклидовом и унитарном пространстве.
13. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
14. Матрица линейного оператора при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
15. Линейное пространство линейных операторов и матриц.
16. Произведение линейных операторов и его матрица.
17. Ядро и образ линейного оператора. Каноническая пара базисов.
18. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости.
19. Обратный оператор. Критерии обратимости.
20. Собственные значения и собственные векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.
21. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных значений.
22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений.
23. Инвариантные подпространства. Сужение оператора.
24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.
26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
27. Жорданов базис и жорданова матрица линейного оператора в комплексном пространстве.
28. Критерий подобия матриц.
29. Теорема Гамильтона-Кели. Минимальный многочлен.
30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.
31. Вещественный аналог жордановой формы.

32. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.
33. Нормальный оператор и нормальная матрица.
34. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.
35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение линейного оператора.
36. Симметрические операторы и симметрические матрицы.
37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.
38. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы.
39. Знакоопределённые операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора (матрицы).
41. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора. Теорема и альтернатива Фредгольма.
42. Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность.
43. Закон инерции квадратичных форм.
44. Приведение квадратичной формы к главным осям.
45. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.
46. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах.
48. Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве. Приведённые уравнения.
49. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.
50. Длина вектора. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.
51. Эквивалентности норм в конечномерном пространстве.
52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.
53. Линейный оператор в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченности. Норма линейного оператора.
54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы.
55. Сингулярное разложение матрицы и обобщённое решение.
56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряжённого оператора (матрицы).
57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.
58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.